# Test di Analisi 2 18/02/22 (terzo appello invernale 20-21)

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**null**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.
*Campo obbligatorio

1. Email *

Istruzioni di compilazione: Si usi:
- lo slash per indicare la linea di frazione: 2/3 per $\frac{2}{3}$;
- il carattere ^ per indicare la potenza: 2^3 per $2^3$;
- le combinazioni >= per il maggiore o eguale $\geq$ e <= per il minore o eguale $\leq$: 1<=2 per $1 \leq 2$;
- il carattere _ per indicare l'indice: a_n per $a_n$;
- sqrt (preferibile) oppure ^(1/2) per indicare la radice, dunque sqrt(2) oppure 2^(1/2) per $\sqrt{2}$;
- exp (preferibile) oppure e^ per indicare l'esponenziale, dunque exp(2) oppure e^(2) per $e^2$;
- Pi per $\pi$;
- le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio ((1+x)/2)^((x+y)/(x-y));
- le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in (1,2,3);
- per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare SUM(n=0,infinito)a_n

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 45 minuti)

2. Cognome *

3. Nome *

4. Matricola *

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

## Esercizio Uno

Si consideri la serie di potenze:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

6. 1 punto

1. Si calcoli il raggio di convergenza $R$ della serie.

$+\infty$

7. 1 punto

2. Si dica se la serie converge puntualmente su $\mathbb{R}$.

*Contrassegna solo un ovale.*

- [x] Sì
- [ ] No

8. 1 punto

3. Si scriva il valore di $f'(0)$ oppure si scriva "non esiste".

0

9.

1 punto

4. Si dica quale delle seguenti espressioni dà il valore di $f(x)$ (nell'intervallo $]-R, R[$).

**(a)** $e^x$;
**(b)** $e^x - 1$;
**(c)** $e^x - 1 - x$;
**(d)** $e^{x^2}$;
**(e)** $e^{x^2} - 1$;
**(f)** $e^{x^2} - 1 - x^2$;
**(g)** nessuna delle precedenti.

*Contrassegna solo un ovale.*

- [ ] (a)
- [ ] (b)
- [ ] (c)
- [ ] (d)
- [ ] (e)
- [x] (f)
- [ ] (g)

Esercizio Due

Si considerino la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty]$ definita da

$$f(x,y,z) := \frac{z}{(x^2+y^2)^\alpha} \qquad (f(0,0,z) = +\infty)$$

dipendente dal parametro $\alpha > 0$ e l'insieme $D \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$D := \left\{ (x,y,z) : 0 \le z \le 1, x^2 + y^2 \le \frac{1}{z^2} \right\}$$

**1.** (1) Se $f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ posso considerare $f(x)=\sum_{m=4}^{\infty} a_m x^m$

dove $a_m = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ è dispari} \\ \dfrac{1}{(m/2)!} & \text{se } m \text{ è pari} \end{cases}$. Allora devo calcolare

$$\max\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{a_m} \underset{\substack{\text{gli } m \text{ dispari} \\ \text{non contano}}}{=} \max\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{a_{2k}} = \sqrt{\max\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{1/k!}} = \sqrt{0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad R = +\infty$$

(diamo per buono che $\sqrt[k]{k!}\to\infty$, si vede con Cesaro).

Un altro modo di ragionare, più semplice, è di notare che $f(x)=g(x^2)$ dove $g(y)=\sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ e qui vedo, con lo stesso ragionamento, che il raggio di conv. per la $g$ è $+\infty$. Ne segue che $f(x^2)$ converge per ogni $x^2$ – cioè per ogni $x \Rightarrow R=+\infty$.

(2) È un teorema sulle serie di potenze che la serie converge puntualmente su $]-R,R[$. Qui $R=+\infty$ da cui la risposta.

(3) $f'(0) = a_1$. Ma $a_1=0$ (vedi il punto 1)

(4) So che $e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 1+x^2+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

$$= 1+x^2+f(x) \iff f(x)=e^{x^2}-1-x^2$$

**2.** Dato che $f$ è misurabile e $\geq 0$ posso usare tutte le formule ammettendo $+\infty$ come risultato.

(1) $$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 z\,dz \iint_{\{x^2+y^2\le \frac{1}{z^2}\}} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} =$$

$$\int_0^1 z\,dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1/z}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^{2\alpha}} = 2\pi\int_0^1 z\,dz\int_0^{1/z}\rho^{1-2\alpha}\,d\rho =$$

$$2\pi\int_0^1 z\,dz\left[\frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right]_0^{1/z}$$ (qui serve $2-2\alpha>0$ cioè $\boxed{\alpha<1}$)

$$= \frac{\pi}{1-\alpha}\int_0^1 z\,\frac{1}{z^{2-2\alpha}}\,dz = \frac{\pi}{1-\alpha}\int_0^1 z^{-1+2\alpha}\,dz = \frac{\pi}{1-\alpha}\left[\frac{z^{2\alpha}}{2\alpha}\right] = \frac{\pi}{(1-\alpha)2\alpha}$$

qui serve $\boxed{\alpha>0}$

10. 4 punti

1. Si dica per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione $f$ è integrabile su $D$.

**(a)** $\alpha > 1$;
**(b)** $0 < \alpha < 1$;
**(c)** $\frac{1}{2} < \alpha < 1$;
**(d)** $0 < \alpha < \frac{1}{2}$;
**(e)** $\alpha > \frac{1}{2}$;
**(f)** nessuna delle precedenti.

*Contrassegna solo un ovale.*

- ( ) (a)
- (X) (b)
- ( ) (c)
- ( ) (d)
- ( ) (e)
- ( ) (f)

11. 1 punto

2. Si scriva il valore (eventualmente infinito) dell'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$.

$2\pi$

( se metto $\alpha = 1/2$ nella formula sopra trovo $\frac{\pi}{(1-1/2)2\frac{1}{2}} = 2\pi$ )

Esercizio Tre

Si considerino la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$ e l'insieme $T \subset \mathbb{R}^2$ defînto da:

$$Q := \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

12. 4 punti

1. Si calcolino tutti i punti critici di $f$ DIVERSI DA $(0,0)$ e li si elenchi di seguito precisando per ognuno se si tratta di punti di massimo locale, minimo locale o punto di sella. Basta scrivere una lista del tipo:
$(x_1, y_1)$ di max
$(x_2, y_2)$ di sella
$\vdots$

$\left.\begin{array}{l}(1,1)\\(1,-1)\\(-1,1)\\(-1,-1)\end{array}\right\}$ tutti punti di sella

13. 1 punto

2. Si dica se $f$ ha minimo su $\mathbb{R}^2$.

*Contrassegna solo un ovale.*

- [ ] Sì
- [x] No

14. 1 punto

3. Si dica se $f$ ha massimo su $\mathbb{R}^2$.

*Contrassegna solo un ovale.*

- [ ] Sì
- [x] No

15. 3 punti

4. Si trovi il minimo di $f$ su $Q$ (o si scriva "non esiste"):

1

3. $f(x,y) = (x^2-1)(y^2-1)+1 = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 - 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 - 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 2$$

(1) Pti critici. Ho il sistema

$$\begin{cases} 2xy^2 = 2x \\ 2x^2y = y \end{cases}$$

Il punto $(0,0)$ risolve il sistema. Se cerco soluzioni $\neq (0,0)$ devo

$$\begin{cases} y^2 = 1 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

da cui i quattro punti $(\pm 1, \pm 1)$

La domanda dice di non considerare $(0,0)$. Per quanto riguarda gli altri punti Ho

$$H_f(\pm(1,1)) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad H_f(\pm(1,-1)) = -\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

In ogni caso ho delle selle.

(3). Notiamo che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x,0) = \lim_{x \to \pm\infty} -x^2 + 2 = -\infty$

(e lo stesso per $\lim_{y \to \pm\infty} f(0,y) = -\infty$)

$\Rightarrow \nexists$ minimo

(2) Notiamo che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x,x) = x^4 - 2x^2 + 2 = +\infty$

$\Rightarrow \nexists$ massimo

(4) e (5) Notiamo che nei punti $P \in \partial Q$

$f(P) = 1$, perché se $P = (x,y) \in \partial Q$ si ha

o $x = \pm 1$ o $y = \pm 1$ e dunque $(x^2-1)(y^2-1) = 0$

DUNQUE $f = 1$ su $\partial Q$. Se $P$ è pto di max/min ho due casi:

(a) $P \in \partial Q \Rightarrow f(P) = 1$ (b) $P \in \mathring{Q} \Rightarrow P$ è critico $\Rightarrow P = (0,0) \Rightarrow f(P) = 2$

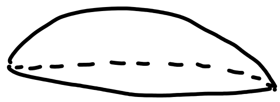
16. 3 punti

5. Si trovi il massimo di $f$ su $Q$ (o si scriva "non esiste"):

2

## Esercizio Quattro

Si considerino gli insiemi $D, S \subset \mathbb{R}^3$ definiti da:



$$D := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 1\}$$
$$S := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 1\}$$

il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x, y, z) := xy^2\vec{\mathbf{i}} - \sin(x^2(z-1))\vec{\mathbf{j}} - y^2z\vec{\mathbf{k}}$$

e la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\gamma(t) := -2\sin(t)\vec{\mathbf{i}} + 2\cos(t)\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}.$$

Indicheremo con $\hat{\nu}(x, y, z)$ la normale unitaria uscente da $D$, definita se $(x, y, z)$ è nella frontiera regolare di $D$.

17. 1 punto

1. Si trovi $\hat{\nu}(2, 1, 2)$ oppure si scriva "non esiste".

$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

18. 1 punto

2. Si trovi $\hat{\nu}(2, 2, 1)$ oppure si scriva "non esiste".

NON ESISTE

19. 1 punto

3. Si trovi $\hat{\nu}(1, 1, 1)$ oppure si scriva "non esiste".

$(0, 0, -1)$

20. 1 punto

4. Quale delle seguenti affermazioni è vera:

**(a)** $S$ è una superficie regolare e $\gamma$ descrive $\Sigma(S)$ coerentemente con $\hat{\nu}$;

**(b)** $S$ è una superficie regolare e $\gamma$ descrive $\Sigma(S)$ coerentemente con $-\hat{\nu}$;

**(c)** $S$ è una superficie regolare ma il sostegno di $\gamma$ è diverso da $\Sigma(S)$;

**(d)** $S$ non è una superficie regolare.

*Contrassegna solo un ovale.*

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)

21. 1 punto

5. Si dica se $\vec{f}$ è conservativo.

*Contrassegna solo un ovale.*

- Sì
- No

22. 1 punto

6. Si dica se $\vec{f}$ è solenoidale.

*Contrassegna solo un ovale.*

- Sì
- No

23. 2 punti

7. Si calcoli l'integrale curvilineo:

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

0

4. È chiaro che $\partial D = S \cup B$ dove

$S = \{G_1 = 0,\ G_2 \le 0\}$ $\quad B = \{G_1 \le 0,\ G_2 = 0\}$ con

$G_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 - 9$ $\qquad G_2(x,y,z) = 1 - z$

($S$ è quello simile nel testo). La normale $\hat{\nu}$ esiste in tutti punti $P$ regolari cioè $P$ fuori da $\{x^2+y^2+z^2=9,\ z=1\}$

$= \{x^2+y^2 = 8,\ z=1\} =: \Sigma$

Se $(x,y,z) \in S \setminus \Sigma \Rightarrow \hat{\nu}(x,y,z) = \dfrac{\nabla G_1(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} = \dfrac{1}{3}(x,y,z)$

Se $(x,y,z) \in B \setminus \Sigma \Rightarrow \hat{\nu} = -(0,0,1) = -\vec{k}$

(1) $(2,1,2) \in S \setminus \Sigma \Rightarrow \hat{\nu} = \dfrac{1}{3}(2,1,2)$

(2) $(2,1,2) \in \Sigma \Rightarrow \nexists\ \hat{\nu}$

(3) $(1,1,1) \in B \setminus \Sigma \Rightarrow \hat{\nu} = (0,0,-1)$

(4) È chiaro che $S$ è regolare e $\Sigma(S) = \Sigma =$

$\{x^2+y^2 = 8,\ z=1\}$

si vede che i punti $(x,y,z) = \gamma(t)$ verificano

$x^2+y^2 = 4,\ z = 1$ $\qquad$ Dunque $\underline{\underline{\gamma(t) \notin \Sigma(S)}}$

(5) $\vec{f}$ NON È IRROTAZIONALE, infatti $\dfrac{\partial f_2}{\partial z} \ne \dfrac{\partial f_3}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y} y^2 z$

$\dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \sin(x^2(z-1))$

(6) $\vec{f}$ è solenoidale dato che

$\operatorname{div} \vec{f} = \dfrac{\partial}{\partial x} x y^2 - \dfrac{\partial}{\partial y} \sin(x^2(z-1)) - \dfrac{\partial}{\partial z} y^2 z = y^2 - y^2 = 0$

⑦ Applico la definizione

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} f(-2\sin(t), 2\cos(t), 1)\circ(-2\cos(t), -2\sin(t), 0)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-2\sin(t)\,4\cos^2(t), \overbrace{\sin\big(4\sin^2(t)\underbrace{(1-1)}_{=0}\big)}^{=0}, -4\cos^2(t)\Big)(-2\cos(t), -2\sin(t), 0)$$

$$= \int_0^{2\pi} 16\sin(t)\cos^3(t)\,dt$$ . Se uso il cambio di variabile

$$s = \cos(t) \Rightarrow ds = -\sin(t)dt \Rightarrow$$

$$16\int_0^{2\pi}\sin(t)\cos^3(t)dt = -16\int_{\cos(0)}^{\cos(2\pi)} s^3\,ds = -16\int_1^1 s^3\,ds = 0$$

⑧ Uso il teorema della divergenza

$$0 = \iiint_D \operatorname{div}\vec{f} = \iint_{\partial D}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma + \iint_B \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$$

Ma $\iint_B \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{\{x^2+y^2\le 8\}} -f_3(x,y,1)\,dx\,dy = \iint_{\{x^2+y^2\le 8\}} y^2\,dx\,dy =$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} \rho^2\sin^2\theta\,\rho\,d\rho = \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt{8}}\rho^3\,d\rho$$

MA $\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$$\int_0^{\sqrt{8}}\rho^3 = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{8}} = \frac{64}{4} = 16$$

Per differenza $\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = -\iint_B \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = -16\pi$

5.

① $$Y_0(t) = e^{tA}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix}1 & t\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix}1-t\\-1\end{bmatrix}$$

② $$Y(t) = \int_0^t e^{t-\tau}B(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{\tau-t}\begin{bmatrix}1 & t-\tau\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tau\\1\end{bmatrix}d\tau =$$

$$e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\begin{bmatrix}\tau+t-\tau\\1\end{bmatrix}d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix}d\tau = e^{-t}\Big[e^{\tau}\Big]_0^t\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix} =$$

$$e^{-t}(e^t-1)\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix} = (1-e^{-t})\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix}$$

24. 4 punti

8. Si calcoli il flusso

$$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma$$

di $\vec{f}$ attraverso $S$ orientato tramite $\hat{\nu}$.

$-16\pi$

## Esercizio Cinque

Si considerino i due sistemi di equazioni differenziali:

$$(S0) \quad \begin{cases} x' = & -x+y \\ y' = & -y \end{cases} \qquad (S) \quad \begin{cases} x' = & -x+y+t \\ y' = & -y+1 \end{cases}$$

che possono essere scritti nella forma:

$$(S0) \quad Y' = AY \qquad (S) \quad Y' = AY + B(t)$$

dove

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

25. 2 punti

1. Si trovi una soluzione $Y_0(t)$ del problema omogeneo $(S0)$ con la condizione iniziale

$$Y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(cioè $x(0) = 1, y(0) = -1$).

$x(t) = (1-t)\, e^{-t}$
$y(t) = -e^{-t}$

26.

5 punti

2. Si trovi la soluzione $Y(t)$ del sistema $(S)$con la condizione iniziale (omogenea)

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(cioè $x(0) = 0, y(0) = 0$).

$x(t) = (1 - e^{-t})\, t = t - t\, e^{-t}$

$y(t) \quad (1 - e^{-t}) = 1 - e^{-t}$

Questi contenuti non sono creati né avallati da Google.

Google Moduli